

UNE OBSTRUCTION GEOMETRIQUE A L'EXISTENCE DE FEUILLETAGES DE CODIMENSION 1 TOTALEMENT GEODESIQUES

FABIANO GUSTAVO BRAGA BRITO

1. Introduction

Soit W^{n+1} une variété riemannienne compacte, connexe et sans bord sur laquelle est défini un feuilletage transversalement orienté \mathcal{F} de codimension 1. D. Asimov [1] a démontré que pour W à courbure sectionnelle constante c on a

$$\frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W K = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \frac{2^n c^{n/2}}{\binom{n}{n/2}}, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Soit maintenant une variété W de dimension 3. S'il existe des constantes K_1, K_2 telles que $K_1 \leq c(x, Q_2) \leq K_2, \forall x \in W, \forall Q_2 \subset T_x W$. On a

$$2K_1 \leq \frac{1}{\text{vol}(W^3)} \int_{W^3} K \leq 2K_2,$$

où $K: W \rightarrow \mathbf{R}$, désigne la courbure de Lipschitz-Killing (de Gauss si $n = 2$) de la feuille qui passe par x au point x avec la métrique induite par celle de W , et $c(x, Q_2)$ la courbure sectionnelle en x dans la direction *du* 2-plan $Q_2 \subset T_x W$.

D'autre part, R. Langevin, H. Rosenberg et l'auteur démontrent dans [2] que

$$\frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \eta_k = \begin{cases} c^{k/2} \binom{n/2}{k/2} & \text{si } n \text{ et } k \text{ sont pairs,} \\ 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

pour W de courbure constante c , et η_k désignant la k -ième fonction symétrique de courbure extrinsèque de la feuille qui passe par x au point x . Suivant [2], les fonctions η_k sont définies par

$$\det(I + tA_x) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) t^i,$$

I étant l'endomorphisme identité, et $A_x: T_x M_x \rightarrow T_x M_x$ étant défini par $A_x(Y) = \nabla_Y(N)$, où M_x est la feuille qui passe par x , et N , ∇ le vecteur normal à \mathcal{F} et la connexion riemannienne de W respectivement.

Il est aussi possible de définir des fonctions intrinsèques de courbure γ_k , $k = 2\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, n/2$, sur les feuilles de \mathcal{F} .

On les appellera courbure k -scalaire [2] et elles mesurent, en chaque point de la feuille, la moyenne des courbures k -sectionnelles. Dans ce cas, pour n pair on a

$$\frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \gamma_k = \sum_{r=0}^{k/2} c^{k/2} \frac{\binom{k/2}{r} \binom{n/2}{r}}{\binom{n}{2r}}.$$

On annonce ici des généralisations de ces résultats de même qu'une obstruction géométrique à l'existence de feuilletages totalement géodésiques.

Dans les assertions ci-dessous, la variété riemannienne W^{n+1} sera toujours compacte, connexe, sans bord et de dimension impaire.

Avec les mêmes notations utilisées jusqu'à maintenant on a

(i) Si $n + 1 \geq 3$ et s'il existe des constantes K_1, K_2 telles que

$$K_1 \leq c(x, Q_2) \leq K_2,$$

alors

$$d_1 \leq \frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \gamma_2 \leq d_2,$$

où d_1, d_2 ne dépendent que de K_1, K_2 et de la dimension n .

En outre, si W est une variété d'Einstein (courbure de Ricci constante), alors l'intégrale $\int_W \gamma_2$ ne dépend pas du feuilletage.

Observation. γ_2 est la courbure scalaire usuelle des feuilles de W .

(ii) S'il existe un entier q , $1 \leq 2q \leq n - 1$, telle que les courbures $2q$ -sectionnelles de W ne s'annulent pas, alors W n'admet pas de feuilletages totalement géodésiques de codimension 1. En particulier les espaces à courbure non nulle (sectionnelle) ont cette propriété.

(iii) Il existe des $(n + 1)$ -formes globales Θ_{2k} , $0 \leq 2k \leq n$, qui dépendent et la variation du champ de vecteurs N normal à \mathcal{F} , mais dont les intégrales sur W ne dépendent pas du feuilletage. En outre

$$\int_W \Theta_{2k} = \int_W c_{2k},$$

où c_{2k} est la courbure $2k$ -scalaire de W . Donc l'intégrale de gauche ne dépend que de la métrique de W .

Remarque. W est orientée et \mathcal{F} est transversalement orientable.

2. Notation

Soit $x \in W^{n+1}$, $U \ni x$ un ouvert de W , $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ un repère orthonormal adapté sur U :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n + 1; \quad N = e_{n+1} \perp \mathcal{F}.$$

Le corepère, les formes de connexion et de courbures associées sont donnés par

$$\begin{aligned} \theta_i(e_j) &= \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j, \quad \delta_{ii} = 1, \\ \omega_{ij}(u) &= \langle \nabla_u(e_i), e_j \rangle, \\ \Omega_{ij} &= d\omega_{ij} - \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \end{aligned}$$

$\langle \ , \ \rangle$ et ∇ dénotent respectivement le produit scalaire et la connexion riemannienne associées à $(W, \langle \ \rangle)$. Les formules de structure sont

$$d\theta_i = \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \theta_k, \quad d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}.$$

Et l'identité de Bianchi prend la forme

$$d\Omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n+1} \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj} - \Omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

3. Les formes $\psi_{k,2l,n}$, $\varphi_{k,2l,n}$, $\Gamma_{2r,n}$ et un lemme combinatoire

Avec les notations introduites au §2 on peut définir des n -formes $\psi_{k,2l,n}$

$$0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq 2l \leq n, \quad k + 2l \leq n$$

et des $(n + 1)$ -formes $\varphi_{k,2l,n}$

$$0 \leq k \leq n - 1, \quad 0 \leq 2l \leq n - 2, \quad k + 2l \leq n - 2l$$

sur un ouvert $U \subset W$. Ces formes sont directement associées au feuilletage \mathcal{F} et sont définies à l'aide d'un repère orthonormal adapté $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ par

$$\begin{aligned} \psi_{k,2l,n} &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1} \wedge \Omega_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \wedge \dots \\ &\quad \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1),\sigma(k+2l)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)}, \\ \varphi_{k,2l,n} &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \dots \wedge \omega_{\sigma(k+1),n+1} \wedge \Omega_{\sigma(k+2),\sigma(k+3)} \\ &\quad \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l)\sigma(k+2l+1)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+2)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+3)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)}, \end{aligned}$$

où S_n dénote le groupe symétrique des permutations à n -éléments.

3.1. Lemme. Les formes $\psi_{k,2l,n}, \phi_{k,2l,n}$ sont globales.

Démonstration. Soit $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n+1}\}$ un autre repère orthonormal adapté à \mathcal{F} . On a

$$\bar{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\bar{e}_{n+1} = e_{n+1},$$

$\det(a_{ij}) = 1$, (a_{ij}) est une matrice orthogonale. On a aussi

$$\bar{\omega}_{i,n+1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \omega_{j,n+1},$$

$$\bar{\Omega}_{ij} = \sum_{r,s=1}^n a_{i,r} a_{j,s} \Omega_{r,s}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

$$\bar{\Omega}_{i,n+1} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Omega_{j,n+1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{k,2l,n} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\sum_{r=1}^n a_{\sigma(1),r} \omega_{r,n+1} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{r=1}^n a_{\sigma(k),r} \omega_{r,n+1} \right) \\ &\wedge \left(\sum_{r,s=1}^n a_{\sigma(k+1),r} a_{\sigma(k+2),s} \Omega_{r,s} \right) \wedge \left(\sum_{r,s=1}^n a_{\sigma(k+3),r} a_{\sigma(k+4),s} \Omega_{r,s} \right) \\ &\wedge \cdots \wedge \left(\sum_{r,s=1}^n a_{\sigma(k+2l-1),r} a_{\sigma(k+2l),s} \Omega_{r,s} \right) \wedge \left(\sum_{r=1}^n a_{\sigma(k+2l+1),r} \theta_r \right) \\ &\wedge \left(\sum_{r=1}^n a_{\sigma(k+2l+2),r} \theta_r \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{r=1}^n a_{\sigma(n),r} \theta_r \right). \end{aligned}$$

La symétrie de S_n nous donne immédiatement

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{k,2l,n} &= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau) a_{\sigma(1)\tau(1)} \omega_{\tau(1),n+1} \wedge \cdots \\ &\wedge a_{\sigma(k)\tau(k)} \omega_{\tau(k),n+1} \wedge a_{\sigma(k+1)\tau(k+1)} a_{\sigma(k+2)\tau(k+2)} \Omega_{\tau(k+1)\tau(k+2)} \\ &\wedge \cdots \wedge a_{\sigma(k+2l-1)\tau(k+2l-1)} a_{\sigma(k+2l)\tau(k+2l)} \Omega_{\tau(k+2l-1)\tau(k+2l)} \\ &\wedge a_{\sigma(k+2l+1)\tau(k+2l+1)} \theta_{\tau(k+2l+1)} \wedge a_{\sigma(k+2l+2)\tau(k+2l+2)} \theta_{\tau(k+2l+2)} \\ &\wedge \cdots \wedge a_{\sigma(n)\tau(n)} \theta_{\tau(n)}. \end{aligned}$$

Le fait que $\det(a_{ij}) = 1$ fournit $\bar{\psi} = \psi$. Par un processus entièrement analogue on démontre que $\bar{\phi} = \phi$.

3.2. Lemme fondamental.

$$d\psi_{k,2l,n} = k\phi_{k-1,2l,n} + 2l\phi_{k+1,2(l-1),n} - (n-k-2l)\psi_{k+1,2l,n} \wedge \theta_{n+1}.$$

Démonstration. $d\psi_{k,2l,n} = A + B + C$, où

$$A = k \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) d\omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1} \\ \wedge \Omega_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1)\sigma(k+2l)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.$$

$$B = (-1)^k l \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1} \\ \wedge d\Omega_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \wedge \Omega_{\sigma(k+3),\sigma(k+4)} \wedge \cdots \\ \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1)\sigma(k+2l)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.$$

$$C = (-1)^k (n-k-2l) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1} \\ \wedge \Omega_{\sigma(k+1)\sigma(k+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1),\sigma(k+2l)} \\ \wedge d\theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.$$

Mais

$$A = A_1 + k\phi_{k-1,2l,n}, \text{ où}$$

$$A_1 = k \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\sum_{j=1}^{n+1} \omega_{\sigma(1),j} \wedge \omega_{j,n+1} \right) \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1} \\ \wedge \Omega_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1)\sigma(k+2l)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.$$

Et

$$A_1 = A_{11} + A_{12}, \text{ où}$$

$$A_{11} = (-1)^{k+1} 2lk \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1} \wedge \omega_{\sigma(k+1),\sigma(1)} \\ \wedge \Omega_{\sigma(1),\sigma(k+2)} \wedge \Omega_{\sigma(k+3),\sigma(k+4)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1)\sigma(k+2l)} \\ \wedge \theta_{\sigma(k+2l+1)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)},$$

$$A_{12} = (-1)^{k+1} (n-k-2l)k \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1} \\ \wedge \Omega_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1),\sigma(k+2l)} \\ \wedge \omega_{\sigma(k+2l+1),\sigma(1)} \wedge \theta_{\sigma(1)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
 B &= -A_{11} + B_1 + 2l\phi_{k+1,2(l-1)n}, \text{ où} \\
 B_1 &= -2l(-1)^k(n-k-2l) \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(k),n+1} \\
 &\quad \wedge \Omega_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(k+2l-1),\sigma(k+2l)} \\
 &\quad \wedge \omega_{\sigma(k+2l+1),\sigma(k+1)} \wedge \theta_{\sigma(k+1)} \wedge \theta_{\sigma(k+2l+2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)}.
 \end{aligned}$$

Pour C nous avons

$$C = -A_{12} - B_1 - (n-k-2l)\psi_{k+1,2l,n} \wedge \theta_{n+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 d\psi_{k,2l,n} &= A + B + C = k\phi_{k-1,2l,n} + 2l\phi_{k+1,2(l-1),n} \\
 &\quad - (n-k-2l)\psi_{k+1,2l,n} \wedge \theta_{n+1}.
 \end{aligned}$$

3.3. Définition. On associe au feuilletage \mathcal{F} des $(n+1)$ -formes $\Gamma_{2r,n}$ sur W pour $r = 0, 1, \dots, n/2$, définies par l'équation

$$\Gamma_{2r,n} = \eta_{2r,n} \wedge \theta_{n+1} + (-1)^{r+1} \frac{(2r-1)(2r-3) \cdots 5.3}{2.4.6 \cdots (2r-4)(2r-2)} \phi_{0,2r-2,n},$$

où

$$\begin{aligned}
 \eta_{2r,n} &= (n-2r+1) \left[-\psi_{2r,0,n} + \frac{2r-1}{2} \psi_{2r-2,2,n} - \frac{(2r-1)(2r-3)}{2.4} \psi_{2r-4,4,n} \right. \\
 &\quad + \cdots + (-1)^{r-1} \frac{(2r-1)(2r-3) \cdots 7.5}{2.4 \cdots (2r-6)(2r-4)} \psi_{4,2r-4,n} \\
 &\quad \left. + (-1)^r \frac{(2r-1k)(2r-3) \cdots 7.5.3}{2.4 \cdots (2r-6)(2r-4)(2r-2)} \psi_{2,2r-2,n} \right].
 \end{aligned}$$

3.4. Corollaire. Les formes $\Gamma_{2r,n}$ sont exactes.

Démonstration. Il suffit de prendre

$$\begin{aligned}
 \tau_{2l-1,n} &= \psi_{2r-1,0,n} - \frac{2r-1}{2} \psi_{2r-3,2,n} + \frac{(2r-1)(2r-3)}{2.4} \psi_{2r-5,4,n} - \cdots \\
 &\quad + (-1)^{r-2} \frac{(2r-1)(2r-3) \cdots 7.5}{2.4 \cdots (2r-6)(2r-4)(2r-2)} \psi_{2,2r-2,n},
 \end{aligned}$$

et appliquer le lemme fondamental pour obtenir

$$d\tau_{2k-1,n} = \Gamma_{2r,n}.$$

4. Les résultats

4.1. Théorème. Si les courbures sectionnelles de W sont bornées par K_1 et K_2 , c.à.d., $K_1 \leq c(x, Q_2) \leq K_2 \forall x \in W, \forall Q_2 \subset T_x W$, alors,

$$\frac{n}{n-1} K_1 \leq \frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \gamma_2 \leq \frac{n}{n-1} K_2.$$

En outre, si W est une variété d'Einstein on a

$$\frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W \gamma_2 = \frac{1}{n-1} \rho,$$

où ρ est la courbure de Ricci de W .

Démonstration. D'après le lemme fondamental on a

$$(1) \quad d\psi_{1,0,n} = \phi_{0,0,n} - (n-1)\psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1}.$$

L'expression de la courbure scalaire de la feuille sera donnée à l'aide d'un repère orthonormal adapté par:

$$\gamma_2 \nu = \frac{-1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \bar{\Omega}_{\sigma(1),\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1},$$

où les $\bar{\Omega}_{ij}$ sont les formes de courbure de la feuille vue comme sous-variété régulière de W^{n+1} munie de la métrique induite par l'inclusion de la feuille et ν la $(n+1)$ -forme volume de W . Explicitement

$$\bar{\Omega}_{ij} = \omega_{i,n+1}^* \wedge \omega_{n+1,j}^* + \Omega_{ij}^*$$

où

$$\omega_{i,n+1}^* = \lambda^* \omega_{i,n+1}, \quad \Omega_{ij}^* = \lambda^* \Omega_{ij},$$

$\lambda: M_x \rightarrow W$, l'inclusion de la feuille qui passe par x .

Donc, on aura

$$\begin{aligned} -\gamma_2 \nu &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (\omega_{\sigma(1),n+1}^* \wedge \omega_{n+1,\sigma(2)}^* + \Omega_{\sigma(1),\sigma(2)}^*) \\ &\quad \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1} \\ (2) \quad &= -\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{\sigma(2),n+1} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \theta_{\sigma(4)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_n \\ &\quad + \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1),\sigma(2)} \wedge \theta_{\sigma(3)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1} \\ &= \frac{-1}{n!} \psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1} - \left[\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i < j = 2}^n c_{ij} \right] \nu, \end{aligned}$$

où c_{ij} est la courbure sectionnelle de W dans la direction du 2-plan déterminé par $\{e_i, e_j\}$.

Le théorème de Stokes appliqué à (1) fournit

$$\int_W \psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1} = \frac{1}{n-1} \int_W \phi_{0,0,n}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \phi_{0,0,n} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1} \\ &= \left[+ (n-1)! \sum_{j=1}^n c_{j,n+1} \right] \nu. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_W \psi_{2,0,n} \wedge \theta_{n+1} = (n-2)! \sum_{j=1}^n c_{j,n+1}.$$

Intégrant les deux membres de l'égalité (2) on obtient

$$(3) \quad \int_W \gamma_2 \nu = \int_W \left[\frac{(n-2)!}{n!} \sum_{j=1}^n c_{j,n+1} + \frac{\sum_{i < j=2}^n c_{ij}}{\binom{n}{2}} \right] \nu.$$

Maintenant, l'inégalité $K_1 \leq c_{ij} \leq K_2$, $1 \leq i, j \leq n+1$, entraîne

$$\frac{n}{n-1} K_1 \leq \frac{1}{\operatorname{vol}(W)} \int_W \gamma_2 \nu \leq \frac{n}{n-1} K_2.$$

Si, en outre, W est une variété, d'Einstein, l'équation (3) nous donne

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(W)} \int_W \gamma_2 = \frac{1}{n-1} \rho,$$

puisque $\sum_{j=1}^n c_{j,n+1} = \rho$ et $\sum_{i < j \leq 2} c_{ij} = \frac{1}{2}(n-1)\rho$.

4.2. Théorème. *S'il existe un entier pair p , $2 \leq p \leq n$, tel que les courbures p -sectionnelles de W soient partout non nulles, alors W n'admet pas de feuilletages totalement géodésiques de codimension 1. En particulier, sur une variété riemannienne à courbure sectionnelle (2-sectionnelle) non nulle il n'y a pas de feuilletages totalement géodésiques de codimension 1.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il y ait un feuilletage totalement géodésique \mathcal{F} sur W . Alors les formes $\psi_{k,2l,n} \wedge \theta_{n-1}$ sont nulles. Donc d'après définition 3.3

$$\Gamma_{p,n} = (-1)^{p/2+1} \frac{(p-1)(p-3) \cdots 5.3.}{2.4.6 \cdots (p-4)(p-2)} \phi_{0,p-2,n}.$$

Mais $\Gamma_{p,n}$ est exacte. Donc

$$(4) \quad \int \Gamma_{p,n} = (-1)^{p/2-1} \frac{(p-1)(p-3) \cdots 5.3}{2.4.6 \cdots (p-4)(p-2)} \phi_{0,p-2,n} = 0.$$

Par contre

$$(5) \quad \begin{aligned} &\phi_{0,p-2,n}(e_1, \dots, e_{n+1}) \\ &= (-1)^{p/2-1} (p-1)! (n-p+1)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq n} c_{i_1 \dots i_{p-1}, n+1}, \end{aligned}$$

où $c_{i_1 \dots i_{p-1}, n+1}$ est la courbure p -sectionnelle dans la direction du plan déterminé par $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{p-1}}, e_{n+1}\}$. Pour une définition des courbures p -sectionnelles voir [4].

Donc (4), (5) fournissent

$$(6) \quad \begin{aligned} \int_W \Gamma_{p,n} &= - \int_W \frac{(p-1)(p-3) \cdots 7.5.3}{2.4.6 \cdots (p-4)(p-2)} (p-1)! (n-p+1)! \\ &\quad \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq n} c_{i_1 \dots i_{p-1}, n+1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que $c_{i_1 \dots i_{p-1}, n+1} \neq 0$ avec la connexité de W .

4.3. Théorème. Soit Θ_{2k} , $0 \leq 2k \leq n$, la $(n+1)$ -forme sur W définie par

$$\Theta_{2k} = -\Gamma_{2k,n} + (-1)^k \frac{(2k-1)(2k-3) \cdots 5.3}{2.4.6 \cdots (2k-2).2k} (n-2k+1) \psi_{0,2k,n} \wedge \theta_{n+1}.$$

Alors

$$\int_W \Theta_{2k} = \alpha \int_W c_{2k},$$

où α est un coefficient combinatoire qui ne dépend que de k et de n , et où c_{2k} désigne la courbure $2k$ -scalaire de W .

Démonstration.

$$\begin{aligned} \psi_{0,2k,n} \wedge \theta_{n+1} &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma(1), \sigma(2)} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma(2k-1), \sigma(2k)} \wedge \theta_{\sigma(2k+1)} \\ &\quad \wedge \theta_{\sigma(2k+2)} \wedge \dots \wedge \theta_{\sigma(n)} \wedge \theta_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc il est évident que

$$\psi_{0,2k,n} \wedge \theta_{n+1} = \left[(2k)! (n-2k)! \sum_{1 \leq i_1 \dots i_{2k} \leq n} c_{i_1 i_2 \dots i_{2k}} \right] \nu.$$

Maintenant on applique la formule (6) du théorème 4.2 et la démonstration est achevée.

5. Conclusion

Soit $H^*(W, \mathbf{R})$ la cohomologie de de Rham de W , et $\varepsilon(\mathcal{F}) \in H^n(W, \mathbf{R})$ la classe d'Euler de \mathcal{F} . Alors, si on se donne un repère orthonormal adapté local, $\varepsilon(\mathcal{F})$ s'exprime par

$$\varepsilon(\mathcal{F}) = (-1)^{n/2} \frac{1}{n!} Pf(\tilde{\Omega}_{ij}),$$

où

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \omega_{i,n+1} \wedge \omega_{n+1,j} + \Omega_{ij} \text{ (voir (M))}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathcal{F}) &= \frac{1}{n!} (-1)^{n/2} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) (\omega_{\sigma(1),n+1} \wedge \omega_{n+1,\sigma(2)} + \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)}) \\ &\quad \wedge (\omega_{\sigma(3),n+1} \wedge \omega_{n+1,\sigma(4)} + \Omega_{\sigma(3),\sigma(4)}) \wedge \dots \\ &\quad \wedge (\omega_{\sigma(n-1),n+1} \wedge \omega_{n+1,\sigma(n)} + \Omega_{\sigma(n-1),\sigma(n)}) \\ &= \frac{1}{n!} \left(\psi_{n,0,n} - \binom{n/2}{n/2-1} \psi_{n-2,2,n} + \binom{n/2}{n/2-2} \psi_{n-4,4,n} - \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n/2-1} \binom{n/2}{1} \psi_{2,n-2,n} + (-1)^{n/2} \psi_{0,n,n} \right). \end{aligned}$$

Le théorème d'Asimov (voir [1, th. 1]) peut s'énoncer de la manière suivante:

Si W^{n+1} a une courbure sectionnelle constante, alors; $\varepsilon(\mathcal{F}) \wedge \theta_{n+1} \in H^{n+1}(W, \mathbf{R})$, ne dépend pas du feuilletage.

Ce qu'on vient de faire dans le théorème 4.3 correspond, pour le cas où $2k = n$, à définir une combinaison linéaire standard $\bar{\Theta}_n$ des formes $\psi_{2r,n-2r,n}$ à coefficients rationnels qui satisfait

$$\bar{\Theta}_n \wedge \theta_{n+1} = \Theta_n \in H^{n+1}(W, \mathbf{R})$$

ne dépend pas du feuilletage.

Cependant, les formes $\bar{\Theta}_n$ ne sont pas fermées en général.

Bibliographie

- [1] D. Asimov, *Average gaussian curvatures of leaves of foliations*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978) 131-134.
- [2] F. Brito, R. Langevin & H. Rosenberg, *Intégrales de courbure sur des variétés feuilletées*, C. R. Acad. Sci. Paris **28** (1977) 533-536; J. Differential Geometry **16** (1981) 19-50.
- [3] J. W. Milnor & J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Math. Studies, No. 76, Princeton University Press, Princeton, 1973.
- [4] J. A. Thorpe, *Sectional curvatures and characteristic classes*, Ann. of Math. **80** (1964) 429-443.

UNIVERSIDADE DE SAO PAULO, BRASIL